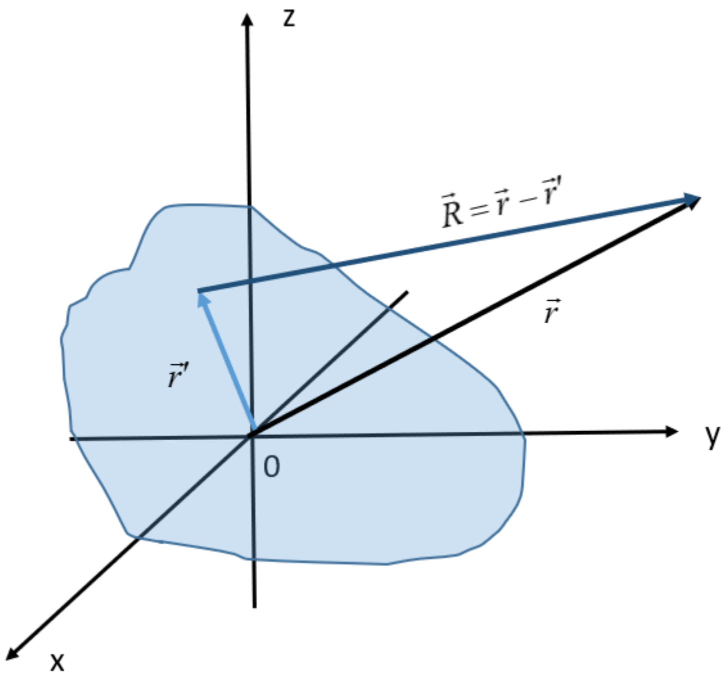
Лекція № 22

На минулій лекції вивели отримали **рівняння Пуассона в інтегральній формі** (формула (6.28)). Змінимо в ній позначення на ті, якими скористалися в формулі (6.29). Тоді маємо (див. рис).

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint_V \left[\rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] dV' - \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS'. \quad (6.30)$$

Припустимо, що всі заряди, які створюють дане електростатичне поле, знаходяться всередині скінченного об'єму (див. рис). Початок координат обираємо десь всередині об'єму.



Виконаємо в (6.30) інтегрування по нескінченному об'єму. В цьому випадку інтеграл по нескінченно далекій поверхні зникає. Площа поверхні збільшується пропорційно квадрату відстані $S \sim r^2$. Потенціал та його нормальна похідна зменшуються або як в разі точкового заряду $\varphi \sim \frac{1}{r}, \frac{\partial \varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^2}$, або навіть швидше (якщо повний заряд всередині об'єму дорівнює нулю). Оцінимо

$$\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^3}.$$

Маємо таку оцінку інтегралу у другому доданку за умови $r \to \infty$:

$$\oint\!\!\!\oint_S \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS \sim \frac{1}{r^3} \cdot r^2 \to 0$$

Можемо стверджувати тепер, що електростатичний потенціал поля для системи зарядів, які знаходяться у скінченному об'ємі, визначається наступним розв'язком рівняння Пуассона

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint_V \left[\rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] dV'. \qquad (6.31)$$

Для системи точкових зарядів з густиною $\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$ електростатичний потенціал

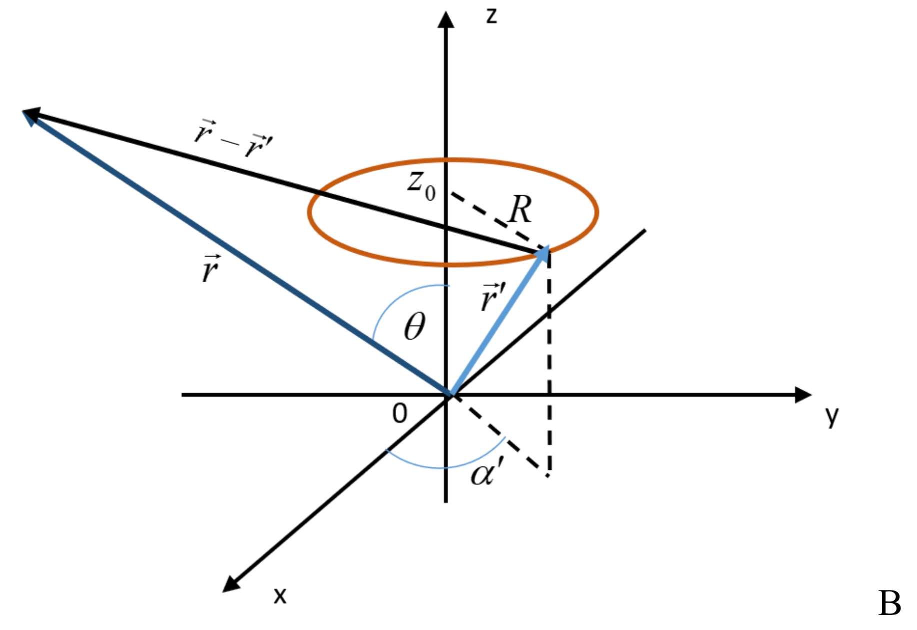
$$\varphi(\vec{r}) = \iiint_V \left[\sum_a e_a \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] dV' =$$

$$= \sum_a e_a \iiint_V \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_a) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|};$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}; \qquad (6.32)$$

6.5.1. Потенціал поля тонкого рівномірно зарядженого кільця

В якості прикладу застосування формули (6.31) розглянемо задачу про електростатичний потенціал тонкого рівномірно зарядженого кільця радіусу R із повним зарядом q. Лінійна густина заряду $\rho = q/2\pi R$. Розташуємо кільце у площині x0y так, щоб центр кільця співпадав із віссю 0z (див. рис). Координати точок кільця $\vec{r}\,' = (R\cos\alpha', R\sin\alpha', z_0)$. Для розрахунків доцільно точку спостереження обрати у площині x0z $\vec{r} = (x, 0, z).$, оскільки кільце має осьову симетрію відносно осі 0z.



Кільце радіусу R паралельне площині xOy на відстані z_0 від осі 0z

Розіб'ємо кільце на нескінченно малі дуги $Rd\alpha'$ й підсумуємо поля, створювані ними. Відстані між цими дугами та точкою спостереження визначаються як

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \left[(x - R\cos\alpha')^2 + R^2\sin^2\alpha' + (z - z_0)^2\right]^{1/2} =$$
$$= \left[x^2 + z^2 + R^2\left(\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha'\right) - 2xR\cos\alpha' - 2zz_0\right]^{1/2}$$

або після переходу до сферичних координат для радіус-вектору $\vec{r}$

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\alpha, r\sin\theta\sin\alpha, r\cos\theta);$$
$$\alpha = 0;$$
$$\vec{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta, 0, r\cos\theta)$$

так:

$$x = r\sin\theta; \quad y = 0; \quad z = r\cos\theta;$$
$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta\cos\alpha' + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta}.$$

Потенціал нескінченно малої дуги:

$$d\varphi = \rho\frac{Rd\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta\cos\alpha' + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta}}; \qquad (6.33)$$

Тут $\rho = \dfrac{q}{2\pi R}$ – лінійна густина заряду,

Сумарний потенціал:

$$\varphi = \varphi = \rho \int_0^{2\pi} \frac{R d\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta\cos\alpha' + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta}} \tag{6.34}$$

або

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta\cos\alpha' + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta}} \tag{6.35}$$

Для спрощення розрахунків в задачнику [Batygin V. V. Problems in electrodynamics / V. V. Batygin, I. N. Toptygin. – Academic Press, 1978. – 574 p.] запропонована така заміна $\alpha' = \pi - 2\beta.$ Тепер

$$\alpha' = \pi - 2\beta; \quad \beta = \frac{\pi - \alpha'}{2}; \quad d\alpha' = -2d\beta;$$

$$0 \le \alpha' \le 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}.$$

Після деяких тригонометричних перетворень

$$r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta\cos(\pi - 2\beta) + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta =$$

$$= r^2 + R^2 + 2rR\sin\theta\cos(2\beta) + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta =$$

$$r^2 + R^2 + 2rR\sin\theta\left(1 - 2\sin^2\beta\right) + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta =$$

$$r^2 + R^2 + 2rR\sin\theta + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta - 4rR\sin\theta\sin^2\beta =$$

$$= \left(r^2 + R^2 + 2rR\sin\theta + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta\right)\left(1 - \frac{4rR\sin\theta}{r^2 + R^2 + 2rR\sin\theta + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta}\sin^2\beta\right).$$

отримаємо такий вираз

$$\begin{gathered} \varphi = \frac{2q}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\sin\theta + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m\sin^2\beta}}; \\ m = \frac{4rR\sin\theta}{r^2 + R^2 + 2rR\sin\theta + z_0^2 - 2rz_0\cos\theta}. \end{gathered} \tag{6.36}$$

Інтеграл, який входить в (6.36) відомий в теорії спеціальних функцій, як «еліптичний інтеграл 1-го роду»

$$K(m)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-m\sin^2\beta}},\quad 0\le m\le 1. \tag{6.37}$$

Деякі результати моделювання поля кільця

6.6. Потенціал поля на великих відстанях від системи зарядів

Нехай система зарядів знаходиться у скінченному об'ємі з характерним лінійним розміром a. Припустимо, що відстань від системи зарядів до точки спостереження $r \gg a$, тоді $r' \ll r$, бо $r' \le a \ll r$.

Будемо шукати наближені формули для $\varphi(\vec{r})$ на далекій відстані від системи зарядів у вигляді

$$\varphi(\vec{r})=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\varphi^{(3)}+\ldots$$

Маємо малі параметри $|x'|,|y'|,|z'| \ll r$ в знаменнику (6.31) (або (6.32)), по яким можна виконати розкладання

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

у тривимірний ряд Тейлора

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)_{x'_\alpha=0}x'_\alpha+\frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha\partial x'_\beta}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)_{\substack{x'_\alpha=0\\ x'_\beta=0}}x'_\alpha x'_\beta+$$
$$\frac{1}{3!}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha\partial x'_\beta\partial x'_\gamma}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)_{\substack{x'_\alpha=0\\ x'_\beta=0\\ x'_\gamma=0}}x'_\alpha x'_\beta x'_\gamma+\ldots$$

Результат такого розкладання можна представити у вигляді

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)x'_\alpha+\frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)x'_\alpha x'_\beta+$$
$$-\frac{1}{3!}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}\frac{\partial^3}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}\left(\frac{1}{r}\right)x'_\alpha x'_\beta x'_\gamma+\ldots$$

Похідні не залежать від змінної інтегрування. Тепер

$$\varphi(r') = \underbrace{\left(\frac{1}{r}\right)\iiint\limits_V \rho(\vec{r}')dV'}_{\varphi^{(0)}} \underbrace{-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right)\iiint\limits_V \rho(\vec{r}')x'_\alpha dV'}_{\varphi^{(1)}} +$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right)\iiint\limits_V \rho(\vec{r}')x'_\alpha x'_\beta dV'}_{\varphi^{(2)}} - \qquad (6.38)$$

$$\underbrace{-\frac{1}{3!}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}\frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}\left(\frac{1}{r}\right)\iiint\limits_V \rho(\vec{r}')x'_\alpha x'_\beta x'_\gamma dV'}_{\varphi^{(3)}} + \ldots$$

Для системи точкових зарядів

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta(\vec{r}' - \vec{r}_a) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta(x' - x_a)\delta(y' - y_a)\delta(z' - z_a)$$

формула (6.38) приймає вигляд

$$\varphi(x,y,z) = \left(\sum_{a=1}^{N} e_a\right)\frac{1}{r} - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha} x_{a\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{r}\right) + \qquad (6.39)$$

$$-\frac{1}{3!}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha} x_{a\beta} x_{a\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$$

В нульовому наближенні отримуємо поле точкового заряду

$$\varphi^{(0)} = \frac{q}{r};$$

$$q = \iiint\limits_V \rho(\vec{r}')dV' = \sum_{a=1}^{N} e_a. \qquad (6.40)$$

розташованого у початку координат. Якщо повний заряд системи дорівнює нулю, суттєвими стають наступні наближення.

Введемо наступні терміни та позначення.

6.6.1. Дипольний момент. Електричний диполь

Дипольний момент довільної системи зарядів визначається так:

$$d_\alpha = \iiint\limits_V \rho(\vec{r}\,')x'_\alpha dV' = \sum_{a=1}^{N} e_a x_{\alpha a};$$
$$\vec{d} = \sum_{a=1}^{N} e_a \vec{r}_a = (d_x, d_y, d_z); \tag{6.41}$$

Дипольний член в потенціалі:

$$\varphi^{(1)} = -\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\sum_{a=1}^{N} e_a x_{a\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) = -\sum_{\alpha=1}^{3} d_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{r}\right) = \sum_{\alpha=1}^{3} d_\alpha\left(\frac{x_\alpha}{r^3}\right) = \frac{d_\alpha x_\alpha}{r^3} = \frac{(\vec{d},\vec{r})}{r^3}.$$

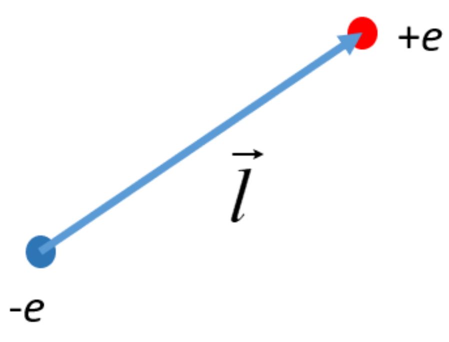
По індексу α, який двічі повторюється відбувається сумування. В останньому виразі індекс суми опущено.

$$\varphi^{(1)} = \frac{(\vec{d},\vec{r})}{r^3}. \tag{6.42}$$

Дипольний момент є тривимірним вектором.

Якщо система зарядів є електрично нейтральною, тобто $\sum_a e_a = 0$, дипольне наближення є першим ненульовим членом розкладання поля на далеких відстанях.

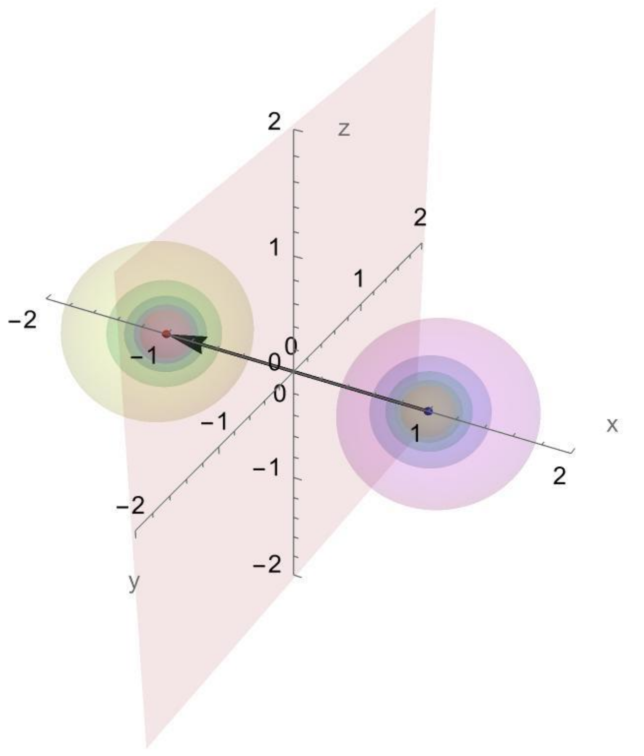
Простішим диполем є система із двох зарядів однакових по величині та протилежних за знаком.



Дипольний момент для такого диполя – це вектор, який проводиться від від’ємного заряду до додатного

$$\vec{d} = e\vec{l}\,. \tag{6.43}$$

Нижче наведені результати моделювання еквіпотенціальних поверхонь поля системи із двох зарядів (тривимірний графік)

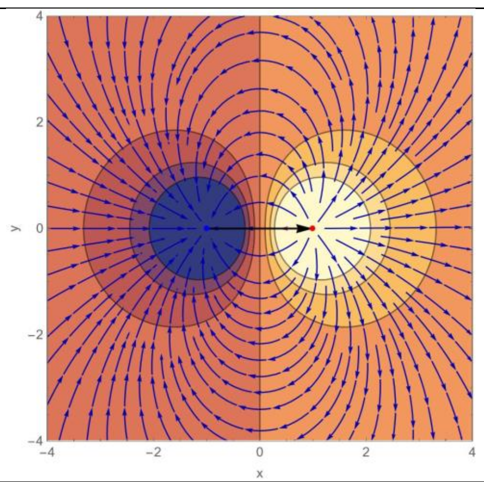
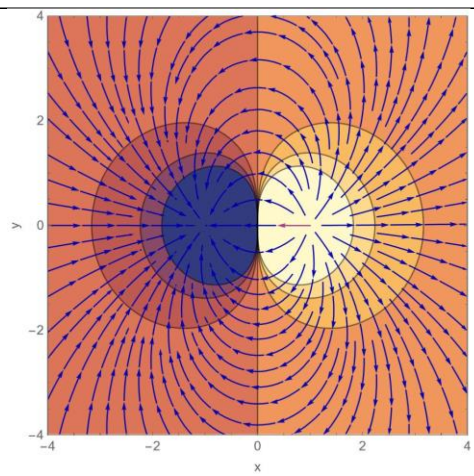


Напруженість поля точкового диполя легко знайти за відомою формулою

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\nabla\frac{(\vec{d},\vec{r})}{r^3} = \frac{3(\vec{d},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3} = \frac{3(\vec{d},\vec{r})\vec{r} - \vec{d}r^2}{r^5};$$

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{d},\vec{r})\vec{r} - \vec{d}r^2}{r^5}. \qquad (6.44)$$

На наступному малюнку приведений 2D графік еквіпотенціальних поверхонь та силових ліній для диполя скінченних розмірів та для точкового диполя у площині диполя.

	
Диполь скінченних розмірів	Точковий диполь